I Intégrales à paramètres

Position du problème :

A est une partie de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle, on s'intéresse à
$F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$ $f : A \times I \to \mathbb{C}$

$U(x) = \sum_{n} f_n(x)$

Sous : à x fixé, $t \to f(x,t)$ cpm

Pb : | $\mathcal{C}^0$ de F ?
| dérivabilité de f $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

I Théorème de régularité :

Th : A) Continuité

Th : On suppose 1) $\forall x \in A$ $t \mapsto f(x,t)$ CPM
$\forall t \in A$, $x \to f(x,t)$ est continue

2) (CVN) $x_0 \in A$ et $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ $\exists \varphi \in L^1(\mathbb{R})$

$\forall x \in U$ $\forall t \in I$ $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ { domination uniforme / (x,t)

Alors $F : x \to \int_I f(x,t)$ est définie sur U et continue en x_0

D/ Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers x_0, $x_n \in U^{\mathbb{N}^*}$
On pose $f_n(t) = f(x_n, t)$
| hyp 1 $\forall t$ $f(x_n,t) \longrightarrow f(x_0,t)$
$f_n \longrightarrow f$
| hyp 2 : $\forall n$ $|f_n(t)| \overset{\circ}{=} |f(x_n,t)| \leq \varphi(t)$

On utilise le CVD : $\int_I f_n(t) \longrightarrow \int_I f_0$
$F(x_n) \longrightarrow F(x)$ ✓

$\mathcal{C}^0$ en le couple ~~⇏~~ $\mathcal{C}^0$ partielle

RMI : On suppose $\begin{cases} I \text{ compact} \\ A \text{ ouvert } \mathbb{R}^n \end{cases}$ si f est continue ~~du couple~~

~~(x,t), 2) est automatiquement vérifiée~~

~~soit~~ En effet, $\exists r > 0 : \overline{B}(x_0, r) \subset A$

$\overline{B}(x_0, r)$ est fermé borné de dim. finie, donc compact

$K = \overline{B}(x_0, r) \times I$ est alors compact. Sur K, f qui est continue est bornée, mettons par M. On pose $\varphi = M$ ✓

⚠ Prenons $A = I = [0,1]$. $A \times I$ est compact

$x > 0$ $f(x,t) = \frac{t}{x^2} e^{-t/x}$, à $t > 0$ fixé on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{t}{x^2} e^{-t/x} = 0$

on pose $f(0,t) = 0$, enfin $f(0,0) = 0$

À x fixé $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$, à t fixé > 0 $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$

$t = 0$: $f(x,0)$ est $\mathcal{C}^0$

$F(x) = \int_0^1 \frac{t}{x^2} e^{-t/x} \, dt$

$\begin{cases} x = 0, \ F(0) = 0 \\ x > 0, \ F(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^1 t e^{-t/x} \, dt = ~~\frac{1}{x^2} \left[-tx e^{-t/x} \right]_0^1 + \frac{1}{x^2} \int_0^1 x e^{-t/x} \, dx~~ \end{cases}$

IPP

$= \int_0^{1/x} u e^{-u} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$

$u = \frac{t}{x}$

$x \, du = dt$

Bilan : $\begin{cases} [0,1]^2 \text{ compact} \\ f \text{ est partiellement } \mathcal{C}^0 \text{ mais } F \text{ n'est pas } \mathcal{C}^0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_n = t_n = \frac{1}{n} \\ f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \to +\infty \end{cases}$

B) Dérivabilité

Th. On suppose que $A \subset \mathbb{R}^m$, I int de $\mathbb{R}$, $f : A \times I \to \mathbb{C}$
tq $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est CPM sur I

(H) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ possède une DP // x $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ $\mathcal{C}^0$ en x
tq $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est CPM

(2) $\forall a \in \mathbb{R}^n\ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ \exists \varphi \in L^1(I)\ \forall (x,t) \in U \times I$ $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$

Alors $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est $\mathcal{C}^0$ dérivable sur U donc en a et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$

D/ F est par hypothèse correctement définie
Dans ce qui suit, on suppose SNG f à valeurs réelles
Soit $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$. On regarde

$$\frac{F(a+h_n) - F(a)}{h_n} = \int_I \underbrace{\frac{f(a+h_n,t) - f(a_n,t)}{h_n}}_{g_n(t)}\,dt$$

CVD? Pour $n \geq N$, $a+h_n \in U$, on applique à t fixé les AF

$$g_n(t) = \frac{f(a+h_n,t) - f(a_n,t)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial x}(c_n, t), \quad c_n \in [a, a+h_n]$$

$\Rightarrow |g_n(t)| \leq \varphi(t)$: la CVD s'applique : $\int_I g_n \longrightarrow \int_I g$

où $g(t) = \lim_{n\to\infty} g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$

On pratique on l'utilise → **Itération simple** : $\exists \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$, $k = 0 \ldots p$, CPM en t

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k, \quad \varphi_k \in L^1(I), \quad k = 0 \ldots p$$

rarement utilisé → **Th** On suppose que f a des dérivées partielles $\mathcal{C}^0$ en x (t fixé)
$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ $k = 0 \ldots p$

On suppose A est un intervalle et $\exists a \in A$ $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)$ int $k = 0 \ldots p-1$

Enfin $\exists \psi \in L^1(I)$ $\forall (x,t) \in A \times I$ $\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leq \psi(t)$

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est $\mathcal{C}^p$ sur A et $\forall k = 0 \dots p$ $\forall x \in A$

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k} = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt$$

D/ Soit S un segment contenant a. Soit $x \in S$ et $t \in I$

il vient $|f(x,t) - f(a,t)| = \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\right|}_{\leq \psi(t)} \underbrace{|x-a|}_{\leq \ell(S)} \leq \ell(S)\psi(t)$

Sur S $|f(x,t)| \leq \underbrace{|f(a,t)| + \ell(S)\psi(t)}_{\text{intégrable}}$ $\Big\{$ $\int_I f(x,t)\,dt$ est normalement CV lorsque $x \in S$.

généralisons : $\tilde{f}(x,t) = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}(x,t)$

$$\left|\frac{\partial \tilde{f}(x,t)}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial f^p(x,t)}{\partial x^p}\right| \leq \psi(t)$$

sur S $|\tilde{f}(x,t)| \leq \underbrace{\left|\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}(a,t)\right| + \ell(S)\psi(t)}_{\in L^1(I)}$

On remonte ainsi de p à $p-1$.

RM : Si A et I sont compacts et si $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$, $k = 0 \dots p$ continue du couple (x,t) les hyp sont vérifiées ($\Rightarrow F \in \mathcal{C}^p$ + Leib

En effet $\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k}$ sont bornés sur le compact $A \times I$ et les constantes sont intégrables sur I

II Intervalle d'intégration compact

Ex : Division dans les fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$, $a \in J$. Mq $x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ prolongée par $g(a) = f'(a)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur J. Calculer alors les dérivées partielles de g en a.

I like ~~chops~~ ~~?~~ frites poon

S/ Taylor sous forme intégrale $\forall x \in J$ $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(u)\,du$

$= (x-a)\int_0^1 f'(a+t(x-a))\,dt$ $\quad u = a+t(x-a)$

et donc $\forall x \in J$: $g(x)=\int_0^1 f'(a+t(x-a))\,dt$ OK si $x=a$

On dit alors que $\forall k \in \mathbb{N}$ $(x,t) \longrightarrow \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[f'(a+t(x-a))\right] = t^k f^{(k+1)}(a+t(x-a))$
est continue du couple (x,t) donc bornée sur les compacts
$S\times[0,1]$ où S est un segment de J : g est $\mathcal{C}^\infty$

Calcul des dérivées : Taylor $\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{g(x)} \underset{x\to a}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} + o((x-a)^{n-1})$

donc $g^{(k)}(a) = \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)}$

Ex d'Alembert-Gauss :
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2 sans racine complexe

On pose, pour $r \geq 0$ $\varphi(r) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{P(re^{it})}$

$P(re^{it}) = \sum_{k=0}^{d} a_k r^k e^{ikt}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial r} = \sum_{k=1}^{d} k a_k r^{k-1} e^{ikt}$ $\quad$ elles sont $\mathcal{C}^0$ et

$\mathcal{C}^0$ $\frac{1}{\cdot}$ sur un segment $\quad \frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{k=2}^{d} ik a_k r^k e^{ikt}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial t} = ir\frac{\partial P}{\partial r}$

$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} -\frac{\frac{\partial P}{\partial r}(re^{it})}{P^2(re^{it})}\,dt = \frac{1}{ir}\int_0^{2\pi} -\frac{P_t(re^{it})}{P^2(re^{it})}\,dt$

$= \frac{1}{ir}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{P(re^{it})}\right)dt$

ainsi $\varphi'(r) = \frac{1}{ir}\left[\frac{1}{P(re^{it})}\right]_0^{2\pi} = 0$

π π π π σ σ σ σ σ σ σ σ σ

φ est donc constante sur $]0,+\infty[$, ($\mathcal{C}^0$ sur un segment)

$\forall x\ \varphi(x) = \frac{\varphi(0)}{P(0)}$

mais $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| \longrightarrow +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ (Faible)

contradiction, d'où le résultat.

③ Convolution :

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\rho : x \mapsto C \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$ $x \in]-1,1[$

et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $C > 0$ choisi de sorte que

$\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$, on sait que ρ est $\mathcal{C}^\infty$. On pose enfin $\rho_n = n\,\rho(nx)$

$\mathrm{supp}(\rho_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$, Enfin on pose $f_n = f * \rho_n$

$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\rho_n(x-t)\,dt$

Mq $\begin{cases} f_n \text{ est } \mathcal{C}^\infty \\ \text{si } S \text{ est un segment de } \mathbb{R},\ f_n \xrightarrow{CVU} f \text{ sur } S \end{cases}$

S/ Obs : si $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_{|x-t| \leq \frac{1}{n}} f(t)\,\rho_n(x-t)\,dt \overset{u=x-t}{=} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x-u)\rho(u)$

notons $S = [a,b]$, $x \in [a,b]$:

il vient $f_n(x) = \underbrace{\int_{a-1}^{b+1} f(t)\,\rho_n(x-t)\,dt}_{g_n(x,t)}$ (car ρ_n est nulle hors de $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$)

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists\ \frac{\partial^k g}{\partial x^k} = f(t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}\rho_n(x-t)\,dt = f(t)\,\rho_n^{(k)}(x-t)$ $\mathcal{C}^0$ de (x,t)

On intègre sur $[a-1,b+1]$, f_n $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$

$|f(x)-f_n(x)| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (f(x)-f(x-u))\rho_n(u)\,du\right|$ Soit $\varepsilon>0$

f est UC sur $[a-1,b+1]$, d'où $\eta>0$ tq $\forall (s,t)\in[a-1,b+1]^2$ $|s-t|<\eta \Rightarrow |f(s)-f(t)|<\varepsilon$

Supposons $n>\frac{1}{\eta}$, il vient $|f(x)-f_n(x)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-u)-f(x)|\rho_n(u)\,du$

$$\leq \varepsilon\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho_n = \varepsilon$$

Ex: Si f convexe Mq f_n convexe

Si $\varphi \geq 0$ à support compact, $f*\varphi(x) = \int_{-A}^{A} f(x-u)\varphi(u)\,du$ est convexe

$f*\varphi((1-\lambda)x+\lambda y) \geq \dots \geq \lambda \dots + (1-\lambda)\dots$

Ex Fubini Soit $f\,[a,b]\times[c,d] \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{C}$

Alors $\int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{fct } \mathcal{C}^0 \text{ de } y}\Big)\,dx = \int_c^d \Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\mathcal{C}^0}\Big)\,dy$

On regarde $G(t) = \int_a^t \left(\int_c^d f(u,y)\,dy\right)du$ $H(t) = \int_c^d \left(\int_a^t f(x,y)\,dx\right)$

On doit étudier $\int_c^d \varphi(t,y)\,dy$: $(t,y) \mapsto \varphi(t,y)$ est continue (t,y)

$\left|\int_a^{t'} f(u,y')\,du - \int_a^t f(u,y)\,du\right| = \left|\int_a^t f(u,y') - f(u,y)\,du + \int_t^{t'} f(u,y')\,du\right|$

$\left|\int_t^{t'} f(u,y')\,du\right| \leq \|f\|_\infty |t-t'|$

Calcul de dérivées $G'(t) = \int_c^d f(t,y)\,dy$
$H'(t) = \int_c^d f(t,y)\,dy$ $\Big)\ G' = H'$

or $G(a) = H(a) = 0$, donc $G = H$ et $G(b) = H(b)$

Ex Soit $[a,b] \times [c,d]$ un rectangle, réunion finie de rectangles $R_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$ d'intérieurs disjoints, dont l'un des côtés est entier. Mq $(b-a) \in \mathbb{N}$ ou $(d-c) \in \mathbb{N}$

S/ $\iint_{c\,a}^{d\,b} e^{2i\pi(x+y)}\,dx\,dy = \frac{1}{2i\pi}\left(e^{2i\pi b} - e^{2i\pi a}\right)\left(e^{2i\pi d} - e^{2i\pi c}\right)$

what the hell is this shit →

et ainsi $\iint_R e^{2i\pi(x+y)}\,dx\,dy = \sum_{n=0}^{N} \iint_{R_n} e^{2i\pi(x+y)}\,dx\,dy = 0$ (hyp)

Ex On suppose que f est $\mathcal{C}^0$, possède une DP $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$

a fixé : th classique

dérivation $x \longmapsto \int_0^x f(x,t)\,dt$

$\longrightarrow \int_0^a \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,dt$

S/ On fixe $a \in \mathbb{R}$. $\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \int_0^a \frac{\left(f(a+h,t) - f(a,t)\right)}{h}\,dt$

$+ \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(a+h,t)\,dt$

$\Delta = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} \left(f(a,t) + \varepsilon(t)\right) dt$ $\quad |\varepsilon(t)| = |f(a+h,t) - f(a,t)|$

$\leqslant \sup_{(x,t) \in [a, a+h]} \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x,t)\right| |h|$

$\Delta \longrightarrow f(a,a)$ par dérivation de $x \longrightarrow \int_0^x f(a,t)\,dt$

$\exists F'(a) = \int_0^a \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f(a,a)$

III Intervalle quelconque

A) Exemples pratiques

Dériver et calculer toutes les intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-t2\pi i x}\,dt\ ,\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x}}{t^2+i}\,dt\ ,\quad \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} e^{ixt}\,dt \quad (\alpha > -1)$$

$t \longmapsto e^{-t^2} e^{-2i\pi t x}$ est $\mathcal{C}^0$

$x \longmapsto e^{-t^2} e^{-2i\pi t}$ est intégrable

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2\pi t e^{-t^2} \text{ intégrable en } [0,+\infty[$$

Donc d'après le th de dérivation, F est dérivable et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2i\pi t e^{-t^2} e^{-2i\pi t x}\,dt$$

IPP $\quad F'(x) = -i\pi \left(\left[e^{-t^2} e^{-2i\pi t x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} +2i\pi t x\, e^{-2i\pi t x}\, e^{-t^2}\, dx \right)$

$\longrightarrow F'(x) = -(2\pi)^2 x F(x)$

donc $F(x) = C e^{-\pi^2 x^2}$, $C \in \mathbb{R}$

$$F(0) = C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

donc $F(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 x^2}$

$F(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} e^{itx}\,dt$, $\alpha > -1$

→ Régularité $\begin{cases} * \text{ à } x \text{ fixé } t \longmapsto t^{\alpha} e^{-t} e^{ixt} \text{ est intégrable} \\ * \text{ à } t \text{ fixé } > 0 : x \longmapsto t^{\alpha} e^{-t} e^{itx} \text{ est } \mathcal{C}^{\infty} \end{cases}$ $\exists \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = i t^{\alpha+1} e^{\dots}$

→ Domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = t^{\alpha+1} e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}^{+*})$

Donc F est dérivable, $F'(x) = i \int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} e^{(-1+ix)t} dt$

IPP $\begin{array}{l} u = t^{\alpha+1} \\ dv = e^{(-1+ix)t} \end{array} \Big| \begin{array}{l} du = (\alpha+1) t^{\alpha} dt \\ v = \dfrac{1}{-1+ix} e^{(-1+ix)t} \end{array}$

$$F'(x) = i \left(\left[t^{\alpha+1} \frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{(-1+ix)t} dt \right)$$

$$\longrightarrow F'(x) = \frac{i(\alpha+1)}{1-ix} F(x) = (\alpha+1) \underbrace{\left[\frac{i(1+ix)}{1+x^2} \right]}_{\left(i \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right)'} F(x)$$

$$F(x) = C \exp\left((\alpha+1)\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + i \operatorname{Arctg} x\right)\right)$$

$$= C \frac{e^{i(\alpha+1)\operatorname{Arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}, \text{ où } C = F(0) = \Gamma(\alpha+1)$$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \quad \underline{x \geq 0}$$

<u>Régularité</u> φ est $\mathcal{C}^0$ en (x,t) et $|\varphi(x,t)| \leq \frac{1}{t^2+1} \in L^1(I)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\cancel{t^2+1}}{\cancel{t^2+1}} \cdot 2x e^{-(t^2+1)x^2} = \underbrace{-2x e^{-(t^2+1)x^2}}_{\text{pas}}$$

pas unif $\lambda \to 0$, on regarde pour $x \not\to 0$

Soit $\tau' > \tau > 0$ pour $\begin{pmatrix} x \in [\tau, \tau'] \\ t \in \mathbb{R}^+ \end{pmatrix}$ ~~pour~~ $x t$ $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| \leq 2\tau' e^{-\tau^2}$

dérive ? → intégrable

DSI : F est dérivable sur $]0,+\infty[$

$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2x\, e^{-(t^2+i)x^2}\, dt$

$\hookrightarrow F'(x) = -2x\, e^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}$

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-(tx)^2}\, d(tx) = \frac{1}{2x}\sqrt{\pi}$

$F'(x) = -\sqrt{\pi}\, e^{-ix^2}$

Or $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{t^4+1}\, dt = \underbrace{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)}_{\text{cf TD}}$

$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\, dt \underset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^4}+1} \frac{du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1}\, du$

$\lim_{x\to+\infty} F(x)$? | $x_n \to +\infty$: $|\varphi(x_n,t)| \le \frac{1}{t^2+1}$

$\varphi(x_n,t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

CVD : $F(x_n) \longrightarrow 0$

$t > 0$

Ainsi $\exists \int_0^{+\infty} F'(x)\, dx = -F(0) + F(\infty)$

$\exists \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx = F(0) - F(\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)$

$\int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

X ! **Ex** (Perso) Soit $a \in]0,1[$. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a\cos t)}{\cos t}\, dt$

$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x\cos t}$ ...

dt

11/16

Transformée de Laplace :

Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ on pose, pour $\lambda > 0$ $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt$
borné

i) Régularité de F ?

ii) Limites de F en $+\infty$ et en 0^+ si $f \geq 0$

S/ i) "singularité" en 0. On travaille sur $[\mu, +\infty[$ $\mu > 0$

On note $M = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}^+}$. Alors

Reg (R) $(\lambda, t) \xrightarrow{\varphi} f(t) e^{-\lambda t}$ est $\mathcal{C}^0$ du couple (λ, t)

dom (D) $\forall (\lambda, t) \in [\mu, +\infty[$ $|\varphi(t, \lambda)| \leq M e^{-\mu t}$ | $t \mapsto M e^{-\mu t} \in L^1(\mathbb{R})$

donc F est $\mathcal{C}^0$ sur $[\mu, +\infty[$, et tout $\lambda > 0$ intérieur à un intervalle : F est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, +\infty[$

F est $\mathcal{C}^\infty$ Soit $p \in \mathbb{N}$ (Reg) $\frac{\partial^p \varphi(\lambda, t)}{\partial \lambda^p} = (-t)^p f(t) e^{-\lambda t} \mathcal{C}^0_{(\lambda, t)}$

(Dom) $\forall (\lambda, t) \in [\mu, +\infty[\times \mathbb{R}^+$

$\left|\frac{\partial^p \varphi}{\partial \lambda^p}(\lambda, t)\right| \leq M t^p e^{-\mu t}$

intégrable. Ainsi F est $\mathcal{C}^p$ sur $[\mu, +\infty[$

$\mu > 0$ quelconque, $p \in \mathbb{N}$ | F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

et $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall \lambda > 0$ $F^{(p)}(\lambda) = \int_0^{+\infty} (-t)^p f(t) e^{-\lambda t}$

ii) lim en $+\infty$

Soit $\lambda_n \nearrow +\infty$, $f_n(t) = \varphi(\lambda_n, t) = e^{-\lambda_n t} f(t)$

il vient $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ |f_n(t)| \leq e^{-\lambda_0 t} M \\ \forall t > 0 \ f_n(t) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \end{cases}$

CVD : $F(x_n) = \int_0^{+\infty} f_n \longrightarrow 0$, $\exists \lim_{+\infty} F(x) = 0$

En 0^+ : F possède une limite finie $\Leftrightarrow f \in L^1(\mathbb{R}^+)$

$\Leftarrow$ $x_n \searrow 0$ $\quad 0 \leq e^{-x_n t} f(t) \leq \underbrace{f(t)}$ $\quad$ CVD $\int_0^{+\infty} e^{-x_n t} f(t) dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} f$

question classique des concours

$\Rightarrow$ Soit $A > 0$ il vient, par CVB sur $[0, A]$

$$\int_0^A e^{-x_n t} f(t)\, dt \longrightarrow \int_0^A f$$

or $f \geq 0$, donc $\forall n$, $F(x_n) \geq \int_0^A e^{-x_n t} f(t)\, dt$

$$\lim_{n \to +\infty} F(x_n) \geq \int_0^A f(t)\, dt$$

donc $\int_0^A f$ est bornée, d'où le résultat

IV Fonction gamma (HP)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $Re(z) > 0$ On pose :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} \frac{dt}{t}$$

Justification $|t^z e^{-t}|_{z = x+iy} = t^{x-1} e^{-t}$ $\xrightarrow{+\infty} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$; $\xrightarrow{0^+} \sim t^{x-1}$, $x-1 > -1$

Props fonctionnelles : ① $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

IPP $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}\, dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt$

$$= z\Gamma(z)$$

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t=u^2}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(5/2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(2) Relation $\Gamma - \zeta$: Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $Re(z) > 1$

On écrit $\Gamma(z)\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(z)}{n^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^z e^{-t} \frac{dt}{t}$

donc $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^z e^{-t} \frac{dt}{t} \underset{nu=t}{=} \int_0^{+\infty} u^z e^{-nu} \frac{du}{u}$

Formellement $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^z e^{-nu} \frac{du}{u} = \int_0 \frac{u^z e^{-u}}{1-e^{-u}}$

Beppo Levi : On regarde $I_n = \int_0^{+\infty} |u^z e^{-nu}| \frac{du}{u} \underset{x=Re(z)}{=} \int_0 u^x e^{-nu} \frac{du}{u}$

$\underset{nu=t}{=} \frac{1}{n^x} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = \frac{\Gamma(x)}{n^x}$

série CV car $x > 1$

Régularité : (x réel > 0) On pose $\varphi(x,t) = t^{x-1} e^{-t}$

$\mathcal{C}^\infty$ de (x,t) [opérations] $\in\,]0,+\infty[^2$

$\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}$

Soit $a, b > 0$, $0 < a < x < b$

$x \in [a,b]$ $t \in [0,1]$ $t^{x-1} \leq t^{a-1}$

$t \in [1,+\infty[$: $t^{x-1} \leq t^{b-1}$

De là $\forall x,t \in [a,b] \times]0,+\infty[$ $\left|\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t)\right| \leq |\ln t|^p \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) e^{-t}$

$\longrightarrow$ La fonction est intégrable

DSI : $\exists\, \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p\, t^{x-1} e^{-t}\, dt \; (\Gamma'' \geq 0)$

* Γ est log-convexe :

On pose $\psi = \log \Gamma$, $\psi' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$, $\psi'' = \frac{\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$

tout revient à montrer que $\psi'' \geq 0$ (?)

On regarde $\Gamma'^2 = \left(\int_0^{+\infty} \underbrace{t^x \log t}_{t^{x/2} \log t} \; \underbrace{e^{-t} \frac{dt}{t}}_{\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}} \right)^2 \overset{C.S}{\leq} \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \frac{dt}{t} \right)}_{\Gamma} \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} t^x (\log t)^2 e^{-t} \frac{dt}{t} \right)}_{\Gamma''}$

RM : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement positive

Mq a) $\log f$ convexe $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $e^{\lambda t} f(t)$ est convexe (*)

b) La somme de 2 fonctions log-convexe l'est

c) Si $f(x,t)$ est C^0, $a < b$ et $\forall t$ $x \mapsto f(x,t)$ est log convexe

Alors $\int_a^b f(x,t)\, dt$ est log convexe

a) ($\Rightarrow$) On regarde $\log(e^{\lambda t} f(t)) = \lambda t + \log f(t)$ qui est par hypothèse convexe

exp étant croissante et convexe, $e^{\lambda t} f(t)$ est convexe

($\Leftarrow$) On veut Mq $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ $\log f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \log \sqrt{f(t_1) f(t_2)}$

C-à-d $f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(t_1) f(t_2)}$

On sait $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $e^{\lambda\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t_1} f(t_1) + e^{\lambda t_2} f(t_2)\right)$

C-à-d $f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(e^{\lambda\frac{t_1-t_2}{2}} f(t_1) + e^{-\lambda\frac{t_1-t_2}{2}} f(t_2)\right)$

min en $e^{\lambda(t_1-t_2)} = \sqrt{\frac{f(t_1)}{f(t_2)}}$

114

b) (*) est stable par CL positive

c) Somme de Riemann $\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(x, a+\frac{b-a}{n}k\right) \xrightarrow{CS} \int_a^b f(x,t)\, dt$

CC Γ est l'unique fonction log-convexe $]0,+\infty[\to]0,+\infty[$

tq $\begin{cases} \Gamma(1)=1 \\ \forall x\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \end{cases}$

Formule de Gauss :

On part de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \frac{dt}{t}$ On note $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(t)$ t^{x-1}

Rappel : $\forall t>0$ $0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t}$ intégrable

CVD $\int_0^{+\infty} f_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(x)$

Or $\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n\, du$

$t = nu$

$= n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\, du \underset{IPP}{=} n^x \left(\left[(1-u)^n \frac{u^x}{x} \right]_0^1 + n\int_0^1 (1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x}\, du \right)$

$= n^x \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x+1} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{x+1}\, du$

$= \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1}\, du = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$